# Istituzioni di Matematiche
## CdL Scienze Biologiche

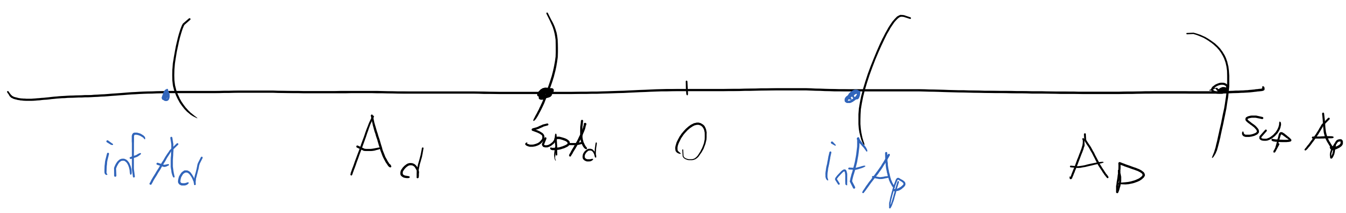
**Esercizio**

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+4} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Scrivo $A = A_p \cup A_d$

dove $$A_p = \left\{ \frac{1}{n+4} \; : \; n \in \mathbb{N} \text{ pari} \right\}$$

e $$A_d = \left\{ \frac{-1}{n+4} \; : \; n \in \mathbb{N} \text{ dispari} \right\}$$




$$\Longrightarrow \quad \max\{\sup A_p, \sup A_d\} = \sup A_p$$

$$\min\{\inf A_p, \inf A_d\} = \inf A_d$$

Determino maggioranti per $A_p$. Poiché gli elementi di $A_p$ sono positivi, cerco maggiorante $x > 0$

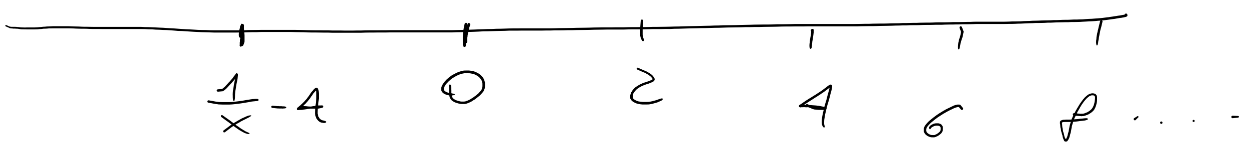
di $A_p$ sono positivi, cerco maggiorante ($x > 0$)

$$\boxed{\frac{1}{n+4} \leq x} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ pari}$$

posso passare ai reciproci

$$n+4 \geq \frac{1}{x}$$

$$\iff \boxed{n \geq \frac{1}{x} - 4}$$ Impongo concordano con $\forall n \in \mathbb{N}$ pari




$$\iff \boxed{\frac{1}{x} - 4 \leq 0}$$

$$\frac{1}{x} \leq 4$$

$$\iff \boxed{x \geq \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow A_p^* = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{4} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup A_p = \frac{1}{4}}$$

Problema $1 \in A_p$ ? $\iff$ $1 = \frac{1}{\ }$ con $n$ pari ?

Problema $\frac{1}{4} \in A_p$ ? $\iff$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{n+4}$ con $n$ pari?

Sì $n=0$

Oss $\boxed{\frac{1}{4} = \max A_p} = \max A$

Cerco minoranti per $A_d$: essendo $A_d$ formato da elementi negativi, cerco minoranti $\boxed{y<0}$

$$y \leq -\frac{1}{n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ dispari}$$

$$-y \geq \frac{1}{n+4}$$

$$\iff \quad \frac{1}{n+4} \leq -y$$

$$\iff \quad n+4 \geq -\frac{1}{y}$$

$$\iff \quad \boxed{n \geq -\frac{1}{y} - 4}$$

impongo che le sol sono $= \forall n \in \mathbb{N}$ disp.

$$-\frac{1}{y}-4 \qquad 1 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad \dots$$

$$\iff \boxed{-\frac{1}{y}-4 \le 1}$$

$$-\frac{1}{y} \le 5$$

$$\iff \frac{1}{-y} \le 5 \qquad (\text{ricorda } -y>0)$$

$$\iff -y \ge \frac{1}{5}$$

$$\iff \boxed{y \le -\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow (A_d)_* = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \le -\frac{1}{5} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\inf A_d = -\frac{1}{5}}$$

<u>Problema</u> $-\frac{1}{5} \in A_d$ ? $\iff -\frac{1}{5} = -\frac{1}{n+4}$ con $n$ dispari ?

Sì scegli $n=1$

<u>Conclusione</u>: $\boxed{\min A_d = -\frac{1}{5} = \min A}$

Conclusione: $\boxed{\min A_d = -\frac{1}{5} = \min A}$

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{x^2-4x}{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

modo alternativo:

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2+1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A = \operatorname{Im} f \overset{\text{Darboux}}{=\!=} (\inf f, \sup f)$$

$$\iff \quad \inf A = \inf f \quad , \quad \sup A = \sup f$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4x}{x^2+1} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4x}{x^2+1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+1) - (x^2-4x)(2x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + 2x - 4x^2 - 4 - \cancel{2x^3} + 8x^2}{(x^2+1)^2} =$$

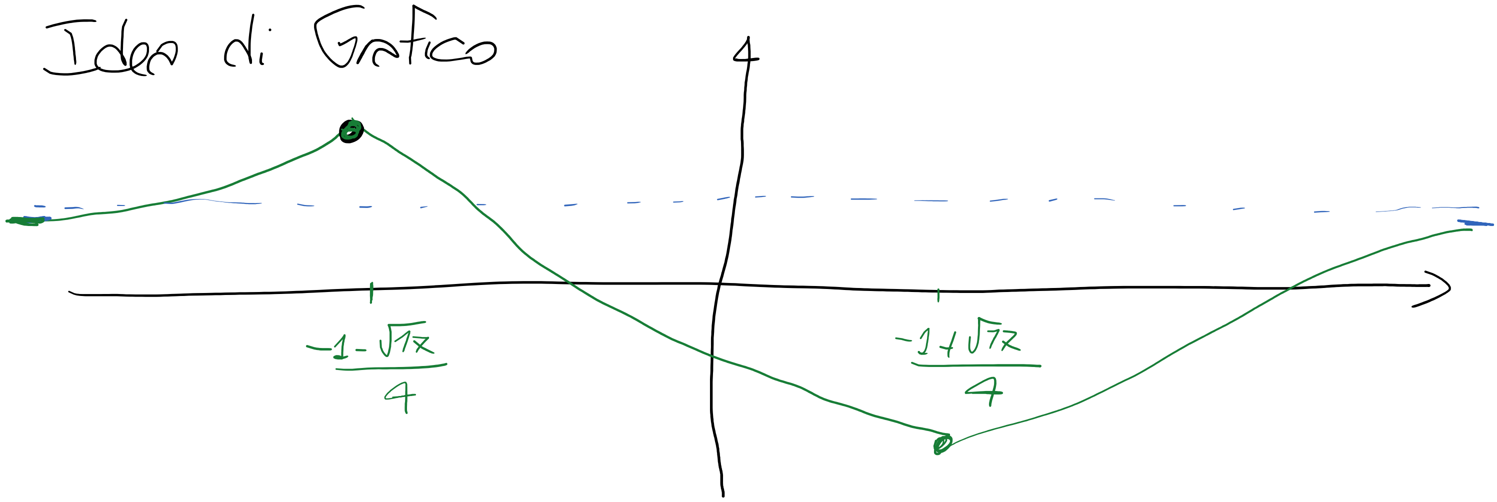
$$= \frac{4x^2+2x-4}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{(x^2+1)^2}}_{>0} \cdot (2x^2+x-2) \geq 0$$

$$\iff \quad 2x^2+x-2 \geq 0$$

$\Delta = 1+16 = 17$ $\quad$ $\underline{\underline{\text{Sol}}}$ $\quad x \leq \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \cup x \geq \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

Idea di Grafico




$$\Rightarrow \quad \sup A = \sup f = f\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right) = \max A$$

$$\inf A = \inf f = f\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) = \min A$$

<u>Esercizio</u>

Punti di discontinuità di

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x + e^{\frac{1}{x}}}{|x| - e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

F è ben definita su $\mathbb{R}$

continuità in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{-x - e^{\frac{1}{x}}} = \left( \frac{0 + e^{\frac{1}{0^-}}}{-0 - e^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

$e^{\frac{1}{0^-}} \to 0$

$$\text{De l'Hopital} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}{-1 + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x^2 - e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x^2}}}{\frac{-x^2 + e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - e^{\frac{1}{x}}}{-x^2 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\left( \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

Provo a percorrere un'altra strada:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{-x - e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x + e^{\frac{1}{x}}}}{-(\cancel{x + e^{\frac{1}{x}}})} = -1$$

$$\lim \quad x + e^{\frac{1}{x}} \quad = \quad \left( \frac{0 + e^{\frac{1}{0^+}}}{} \quad 0. \right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+e^{\frac{1}{x}}}{x-e^{\frac{1}{x}}} = \left( \frac{0^+ + e^{\frac{1}{0^+}}}{0^- - \underbrace{e^{\frac{1}{0^+}}}_{\to +\infty}} = \frac{+\infty}{-\infty} \ f.i. \right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)} = \times$$

chiamo $z = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} z = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = +\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}$$

cambio variabile $\displaystyle\lim_{z\to +\infty} \frac{1+z}{1-z} = -1$

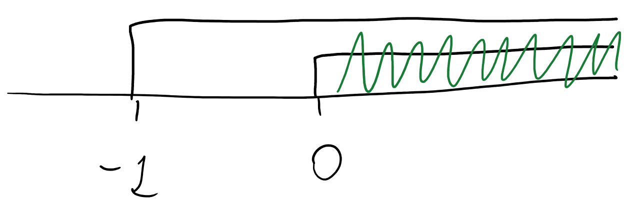
$\Longrightarrow$ $f(x)$ ha discontinuità eliminabile in $x=0$

Esercizio

Determinare l'immagine di

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

CE $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x \geq 0 \end{cases}$ $\quad -1 \quad 0$

$CE = [0, +\infty[$

Per Darboux $\quad \mathrm{Im}f = \left( \inf_{[0,+\infty[} f \; , \; \sup_{[0,+\infty[} f \right)$

$f(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\cancel{x}+1) - \cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

$\to +\infty$

Rischio $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (+\infty - \infty \text{ f.i})$

Stiamo usando $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 0$$

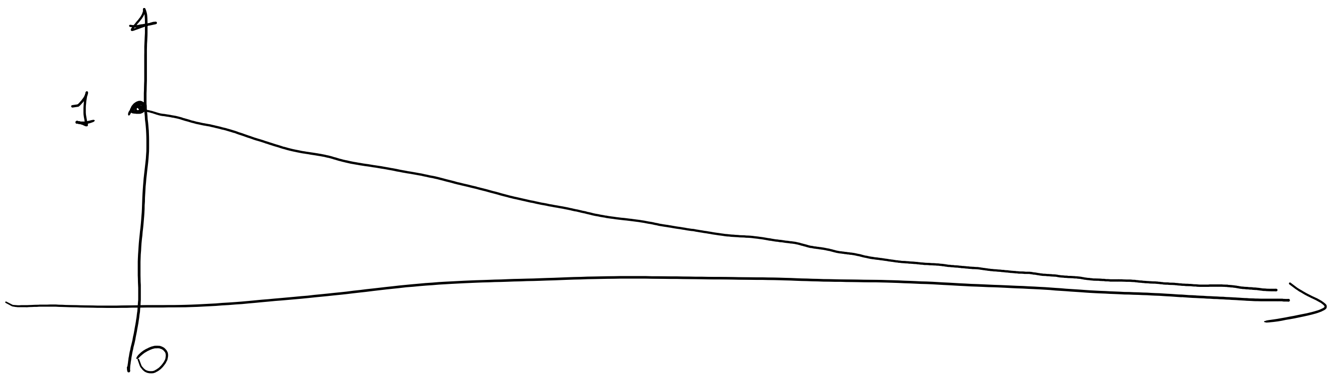
$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$$

$$\iff \sqrt{x+1} \leq \sqrt{x}$$

$$\iff \cancel{x}+1 \leq \cancel{x}$$

$$1 \leq 0$$ mai

$f(x)$ decresce sempre in $[0,+\infty[$




$$\Rightarrow \sup_{[0,+\infty[} f = 1 = \max_{[0,+\infty[} f = f(0)$$

$$\inf_{[0,+\infty[} f = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \left(\inf_{[0,+\infty[} f \, , \, \sup_{[0,+\infty[} f\right) = ]0,1]$$

<u>Esercizio</u> Data la funzione

$$f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$$

Determinare CE ed eventuali asintoti

$CE = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} - 2\overbrace{\arctg x}^{\to\frac{\pi}{2}} = +\infty$$

Cerco Asintoto Obliquo destro

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2\arctg x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \cancel{\frac{x}{x}} - \overbrace{\frac{2\overbrace{\arctg x}^{\to\frac{\pi}{2}}}{x}}^{\to 0} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 1\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} (\cancel{x} - 2\arctg x) - \cancel{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -2\arctg x = -\pi$$

$\Rightarrow \boxed{y = x - \pi}$ è Asintoto Obl. destro

Sinistro:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 2\overbrace{\arctg x}^{\to-\frac{\pi}{2}} = -\infty$$

Cerco Asint. Obl. sinistro

$$(\cdot)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1$$

$\nearrow 0$

$$(\cdot\cdot)\quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - 1\cdot x] = \lim_{x\to-\infty} \cancel{x} - 2\,\mathrm{arctg}\,x - \cancel{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -2\,\mathrm{arctg}\,x = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$\nearrow -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = x + \pi}$ è Asintoto Obliquo sinistro

Esercizio Disegnare il grafico di

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$$

$$CE \quad x \neq -1 \quad = \left]-\infty, -1\right[ \cup \left]-1, +\infty\right[$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-2}{x+1} = +\infty$$

$\nearrow -1$ , $\to 0^-$

$x \to -1^- \iff x < -1 \iff x+1 < 0$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-2}{x+1} = -\infty$$

$$\Longrightarrow \quad x = -1 \quad \text{è Asint Verticale}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{x^2 - 2}^{\to +\infty}}{\underbrace{x+1}_{\to -\infty}} = -\infty$$

$$(\cdot) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2}{(x+1)\,x} = 1$$

$$(\cdot\cdot) \quad \lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2}{x+1} - x =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2 - \cancel{x^2} - x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-2}{x+1} = -1$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = x - 1} \quad \text{è Asintoto Obl. sinistro}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x^2-2}^{\to +\infty}}{\underbrace{x+1}_{\to +\infty}} = +\infty$$

$$(\cdot) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{(x+1)\,x} = 1$$

$$(\cdot\cdot) \quad \lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{x+1} - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2 - x^2 - x}{x+1} = -1$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = x - 1} \quad \text{è anche Asintoto Obl destro}$$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x+1) - (x^2-2) \cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$(x+1)^2$

$$= \frac{2x^2+2x-x^2+2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

Si $f'(x) \geq 0 \iff x^2+2x+2 \geq 0$

$\Delta = 4-8 < 0$

$f'(x) \geq$ sempre (la funzione è sempre crescente)

Convessità: $f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x+2)\,2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}$

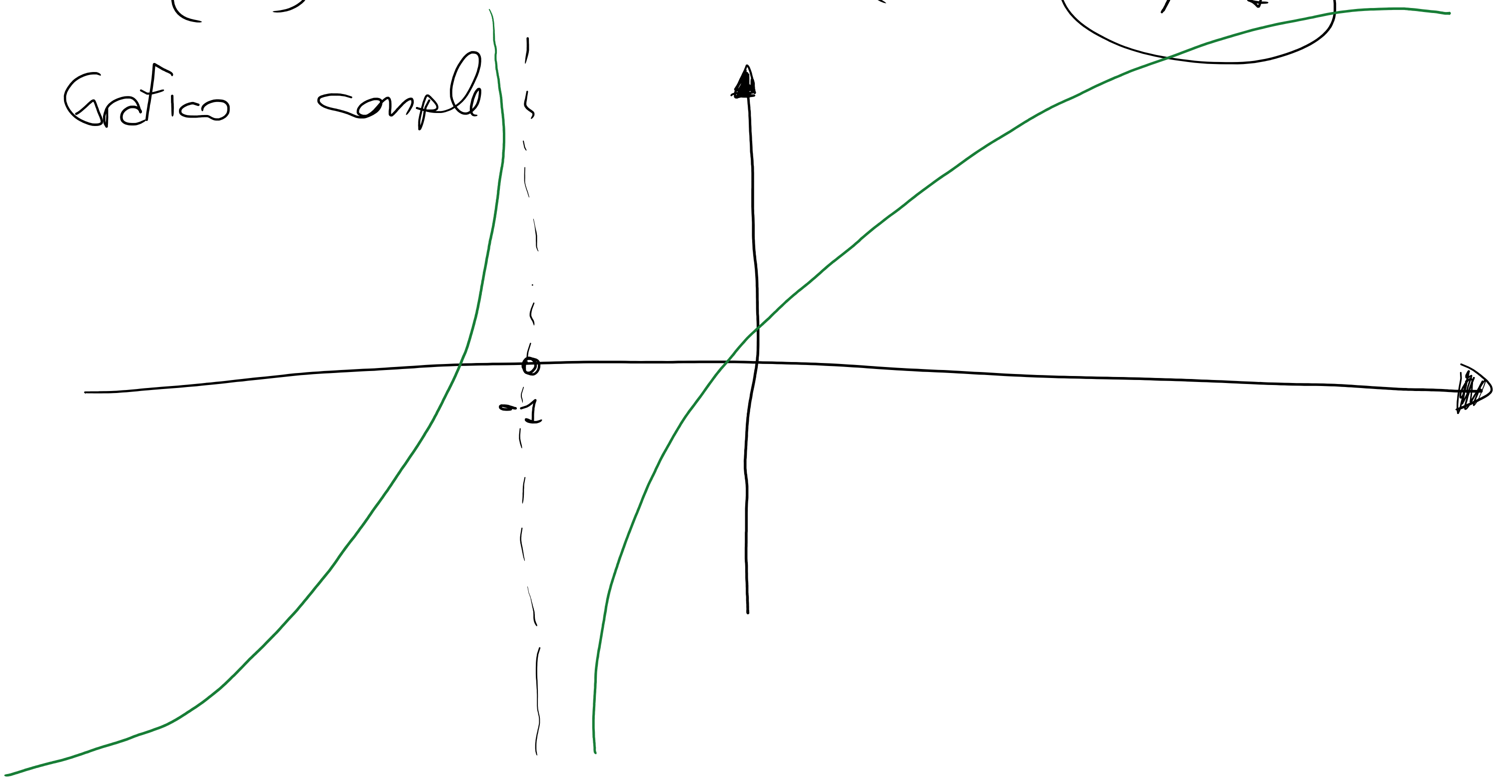
$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}\left[(x+1)^2-(x^2+2x+2)\right] =$$

$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}\left[\cancel{x^2}+\cancel{2x}+1-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-2\right]$$

$$= -\frac{2(x+1)}{(x+1)^4} \geq 0 \ (?)$$

$\iff \quad x+1 \leq 0 \iff x \leq -1$

Grafico comple




Teoria

Abbiamo già introdotto le successioni. Ciò che lega limiti di funzioni con limiti di successioni è il seguente

**Teorema** (Ponte)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in DA$ e $f : A \to \mathbb{R}$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \begin{cases} \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \iff \left[ \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ con } \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l \right]$$

Nota $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ si tratta di limite di successione

Esempio Studiamo $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

Attraverso il teorema Ponte:

sia $x_n = 0 + 2n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(1) $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(0+2n\pi)$$

$$= \operatorname{sen} 0 = 0$$ (vedi periodicità)

(2) sia $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(vedi periodicità)

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x$$

Analogamente $\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$

Successioni definite per Ricorrenza

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ , $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

supponiamo di avere un primo dato $a_0$

Attraverso $f$ nasce la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come

$$a_1 = f(a_0) \qquad \dots \qquad a_{n+1} = f(a_n)$$

$$a_2 = f(a_1) \qquad\qquad\qquad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

Studiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n$ , dove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definita per ricorrenza.

Supponiamo che $f(x)$ sia continua.

Passo 1 Accertatevi che $a_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ (per aver senso la successione)

Passo 2 Studiare la regolarità di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (attraverso la monotonia di $f(x)$)

Passo 3 Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ , essendo $f(x)$ continua

si ha $a_{n+1} = f(a_n)$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\ell)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ell = f(\ell)}$$

Da questa eq^ne ricavo il valore di $\ell$ !!!

<u>Esercizio</u>

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Capiamo $f(x) = \sqrt{2+x}$ $\quad (a_{n+1} = f(a_n))$

$CE = 2 + x \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -2}$

ma $a_1 = \sqrt{2} \geq -2$ si

<u>Attenzione</u> : ma $a_1 = \sqrt{2} > 0$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > 0$

$\Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ in particolare

$a_n \in [-2, +\infty[ \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Passo 2</u>

Studio monotonia di $f(x)$

$f'(x) \quad 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0 \quad \underline{\text{sempre}}$$

$\Rightarrow$ f(x) è sempre crescente.

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 < a_2$$

f(x) cresce $\Rightarrow f(a_1) < f(a_2) \iff a_2 < a_3$

f(x) cresce $\Rightarrow f(a_2) < f(a_3) \iff a_3 < a_4$

In generale ottengo $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

supponiamo $l = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

Essendo f(x) continua

<u>Passo 3</u>

$$\boxed{l = f(l)} > 0$$

$$\ell = \sqrt{2+\ell}$$

$$\ell^2 = 2+\ell$$

$$\boxed{\ell^2 - \ell - 2 = 0}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 3^2$$

$$\ell = \cancel{\frac{1-3}{2}} \quad , \quad \ell = \frac{1+3}{2}$$

OK

ricordo
$f(x) = \sqrt{2+x} > 0$
$\forall x \in CE$

$$\Rightarrow \ell = 2$$

Conclusione

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$$

Per maggiore verifica: $a_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Esercizio</u>

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \; : \; ]-\infty, -1[ \, \cup \, ]-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Passo $a_n \neq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_1 = 2 \neq -1$$

Noto $a_1 = 2 > 0 \Rightarrow a_2 = \dfrac{1}{1+a_1} > 0$

Così procedendo otteniamo $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

In particolare $a_n \neq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Passo 2 Monotonia di $f(x)$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \quad \text{Sempre}$$

$\Rightarrow f(x)$ è sempre decrescente.

Studio monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (attraverso la decrescenza di $f(x)$)

$$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{a_1 > a_2} \Leftrightarrow f(a_1) < f(a_2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 < a_3}$$

$f$ decresce $\Rightarrow$ $f(a_2) > f(a_3) \iff \boxed{a_3 > a_4}$

Procedendo $\boxed{a_4 < a_5}$ $\boxed{a_5 > a_6}$

Se studio la monotonia di $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e di $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_{2n+2} \leq a_{2n} \quad ?$$

Ma $a_{2n+2} = \dfrac{1}{1+a_{2n+1}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+a_{2n}}}$

$$= \frac{1+a_{2n}}{1+a_{2n}+1} = \frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}}$$

Ossia $a_{2n+2} = g(a_{2n})$ con $g(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$

$$g'(x) = \frac{2+x-(1+x)}{(2+x)^2} = \frac{1}{(2+x)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{2n+2} \geq a_{2n}}$$

$\Rightarrow$ estratta pari $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente

Analogamente $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è anche crescente

Inoltre :

$$a_{2n} \leq 1$$

$$a_{2n+1} \leq 1$$

Infatti $a_{2n+2} = \dfrac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}} \leq 1$

successioni crescenti limitate

$\exists$ Finito $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = l_1$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = l_2$$

Passo 3

$$l_1 = g(l_1)$$

$$l_2 = g(l_2)$$

e cerco soluzioni positive (Ricordo $a_n > 0$ !!)

$$l_1 = \frac{1+l_1}{2+l_1} \quad ; \quad l_2 = \frac{1+l_2}{2+l_2}$$

$$2l_1 + l_1^2 = 1 + l_1$$

$$l_1^2 + l_1 - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\cancel{l_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \quad , \quad l_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Essendo dove $l_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_{2n} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$